Tentti: Geometrinen geodesia 06.10.2003

Funktiolaskin

Kaavakokoelma:

Olkoon pallokolmion ABC sivut a, b, c ja sivujen vastakkaiset kulmat α, β, γ. Silloin:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

Clairaut:n lause:

$$N(\varphi) \cos \varphi \sin A = \text{vakio}.$$

Litistyssuhde ja eksentrisyys (a, b maa-ellipsoidin pitkä ja lyhyt akselipuolikas):

$$f = \frac{a-b}{a},\ e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Leveysasteet: maantieteellinen φ, geosentrinen ϕ, redukoitu β:

$$\tan \varphi = \frac{a^2}{b^2} \tan \phi = \frac{a}{b} \tan \beta.$$

Gaußin kokonaiskaarevuus $K = \frac{1}{R_1 R_2}$, jossa R_1, R_2 pääkaarevuussäteet.

1. **Pallokolmio**

   Kolme pistettä: N on pohjoisnapa, A on ($\varphi = 0$, $\lambda = 0$), B on ($\varphi = 0$, $\lambda = 120°$).

   (a) Laske kolmion *pinta-ala* (*vihje*: montako sellaista kolmiota mahtuu koko pallon pinnalle?) Maapallon säde R saa jäädä symbolina tulokseen.

   (b) Laske kolmion palloylijäämä kaavan $\varepsilon = SR^{-2}$ avulla, jossa S on pinta-ala ja R on maapallon säde.

   (c) Piirrä kolmion geometria. Laske nyt kolmion palloylijäämä suoraan geometrisesti käyttämällä kulmien $\angle N$, $\angle A$, $\angle B$ kuvasta luettavat arvot.

2. **Pallotrigonometria**

   (a) Laske Helsingin ($\varphi = 60.2°, \lambda = 24.9°$) ja Oulu ($\varphi = 65.0°, \lambda = 25.5°$) välinen etäisyys kulmayksiköissä (°). Paljonko se on kilometreissa jos $R = 6378\,\mathrm{km}$?

   (b) Helsingistä ($\varphi = 60°$) nähtynä satelliitin paikka taivaalla on: tuntikulma $t = 4^{\mathrm{h}}40^{\mathrm{m}}$, deklinaatio $+20°$. Laske satelliitin *korkeuskulma* horisontin yläpuolella.

3. **Koordinaatit, muunnokset, karttaprojektiot**

   (a) Näytä, että rotaatiomatriisi

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha & -\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha & -\sin\alpha\sin\beta \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

   on *ortogonaalinen.*

   (b) Kuvaa, miten pallon muotoisen maan tapauksessa *Mercatorin projektio* toimii. Onko Mercator ns. "lamppuprojektio", ts. onko se optisesti toteuttavissa?

4. **Pintateoria**

Annettuna *pyörähdysellipsodin* pinta ja sen parametrisointi (β, λ):

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cos\beta\cos\lambda \\ a\cos\beta\sin\lambda \\ b\sin\beta \end{bmatrix}.$$

Tässä vakiot a, b ovat ellipsoidin pitkä ja lyhyt akselipuolikas.

   (a) Laske tangenttivektoripari

$$\mathbf{x}_\beta = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \beta} \text{ ja } \mathbf{x}_\lambda = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}$$

   ja metrinen tensori

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{\beta\beta} & g_{\lambda\beta} \\ g_{\beta\lambda} & g_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\beta \cdot \mathbf{x}_\varphi & \mathbf{x}_\lambda \cdot \mathbf{x}_\beta \\ \mathbf{x}_\beta \cdot \mathbf{x}_\lambda & \mathbf{x}_\lambda \cdot \mathbf{x}_\lambda \end{bmatrix}.$$

   (b) Miten on komponentin $g_{\lambda\beta}$ arvo tulkittavissa?

5. **Sekalaiset**

(a) Annettuna $a = 6378388\,\mathrm{m}$, $f = 1/297$. Laske b; jos $\varphi = 45°$, laske ϕ ja β.

(b) Isometrinen leveysaste on

$$\psi = \int_0^{\varphi} \frac{M(\varphi')}{p(\varphi')} d\varphi',$$

jossa M on mediaanikaarevuussäde ja kaavassa $p(\varphi) = N(\varphi)\cos\varphi$ on poikittaiskaarevuussäde.

Oleta, että maapallo on pallo, eli sen molemmat kaarevuussäteet ovat samat, R. Anna yo. kaavan yksinkertaistettu versio.

Todista, että

$$\psi = \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

on integraalin suljettu ratkaisu.

Pisteytys:

Kysymys	1 a b c	2 a b	3 a b	4 a b	5 a b	Yht.
Pisteet	5 2 1 2	5 2 3	5 3 2	5 3 2	5 2 3	25

Pisteet	10	13	16	19	23
Arvosana	1	2	3	4	5