

# Tentti: Geometrinen geodesia 09.05.2003

## Funktiolaskin

### Kaavakokoelma:

Olkoon pallokolmion  $ABC$  sivut  $a, b, c$  ja sivujen vastakkaiset kulmat  $\alpha, \beta, \gamma$ . Silloin:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

Clairaut:n lause:

$$N(\varphi) \cos \varphi \sin A = \text{vakio.}$$

Litistyssuhde ja eksentrisyys ( $a, b$  maa-ellipsoidin pitkä ja lyhyt akselipuolikas):

$$f = \frac{a-b}{a}, e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Leveysasteet: maantieteellinen  $\varphi$ , geosentrinen  $\phi$ , redukoitu  $\beta$ :

$$\tan \varphi = \frac{a^2}{b^2} \tan \phi = \frac{a}{b} \tan \beta.$$

## 1. Pallokolmio

Kolme pistettä:  $N$  on pohjoisnapa,  $A$  on ( $\varphi = 0, \lambda = 0$ ),  $B$  on ( $\varphi = 0, \lambda = 90^\circ$ ).

- Laske kolmion *pinta-ala* (*vihje*: montako sellaisia kolmioita mahtuu koko pallon pintaan?)
- Laske kolmion palloylijäämä kaavan  $\varepsilon = SR^{-2}$  avulla, jossa  $S$  on pinta-ala ja  $R$  on maapallon säde.
- Laske kolmion palloylijäämä suoraan geometrisesti. Mitkä ovat kulmien  $\angle N, \angle A, \angle B$  arvot?

## 2. Pallotrigonometria

- (a) Laske Helsingin ( $\varphi = 60^\circ, \lambda = 25^\circ$ ) ja Moskovan ( $\varphi = 56^\circ, \lambda = 38^\circ$ ) välinen etäisyys kulmayksiköissä ( $^\circ$ ).
- (b) Helsingistä ( $\varphi = 60^\circ$ ) nähtynä satelliitin paikka taivaalla on: tuntikulma  $t = 5^{\text{h}}20^{\text{m}}$ , deklinaatio  $+25^\circ$ . Laske satelliitin *korkeuskulma* horisontin yläpuolella.
- (c) Satelliitin ratatason inkliinaatio on  $74^\circ$ . Mikä on radan suunnan atsimuti kun satelliitti lentää Helsingin leveyspiirin ( $\varphi = 60^\circ$ ) yli? Saat olettaa maapalloa palloksi ja satelliitin radan projektio maan pinnalle suurympyräksi.

### 3. Koordinaatit ja muunnokset

- (a) Näytä, että rotaatiomatriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_p \\ 0 & 1 & y_p \\ x_p & -y_p & 1 \end{bmatrix}$$

on *ortogonaalinen* siinä tapauksessa, että  $x_p, y_p$  (navan koordinaatit kulmayksiköissä) ovat *pieniä*.

- (b) Annettuna  $a = 6378137$  m,  $f = 1/298.257222101$ . Laske  $e^2$  ja  $b$ .
- (c) Annettuna kuten (b). Jos  $\varphi = 45^\circ$ , laske  $\phi$  ja  $\beta$ .

### 4. Pintateoria

Annettuna kartion pinta ja sen parametrisointi  $(s, \lambda)$ :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \sin \alpha \cos \lambda \\ s \sin \alpha \sin \lambda \\ s \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Tässä vakio  $\alpha$  on kartion huipun puolikulma.

- (a) Laske tangenttivektoripari

$$\mathbf{x}_s = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \text{ ja } \mathbf{x}_\lambda = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}$$

ja metrinen tensori

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{ss} & g_{s\lambda} \\ g_{s\lambda} & g_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \cdot \mathbf{x}_s & \mathbf{x}_\lambda \cdot \mathbf{x}_s \\ \mathbf{x}_s \cdot \mathbf{x}_\lambda & \mathbf{x}_\lambda \cdot \mathbf{x}_\lambda \end{bmatrix}.$$

- (b) Miten on komponentin  $g_{\lambda s}$  arvo tulkittavissa?
- (c) Laske pinnan *normaalivektori*,

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_s \times \mathbf{x}_\lambda}{\|\mathbf{x}_s \times \mathbf{x}_\lambda\|}.$$

- (d) Laske Gaußin *toiset perussuureet*

$$\begin{aligned} e &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{ss}, \\ f &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{s\lambda}, \\ g &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{\lambda\lambda}. \end{aligned}$$

(e) *Intuitiivisesti*: onko tämä pinta (sisäisesti) kaareva? Miksi/miksei?

### 5. Karttaprojektiot

Isometrinen leveysaste on

$$\psi = \int_0^\varphi \frac{M(\varphi')}{p(\varphi')} d\varphi',$$

jossa  $M$  on mediaanikaarevuussäde ja kaavassa  $p(\varphi) = N(\varphi) \cos \varphi$  on poikittaiskaarevuussäde.

- (a) Oleta, että maapallo on pallo, eli sen molemmat kaarevuussäteet ovat samat,  $R$ . Anna yo. kaavan yksinkertaistettu versio.
- (b) Todista, että

$$\psi = \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

on integraalin suljettu ratkaisu.

### Pisteytys:

Kysymys	1 a b c	2 a b c	3 a b c	4 a b c d e	5 a b	Yht.
Pisteet	5 2 1 2	5 2 2 1	5 2 2 1	5 1 1 1 1 1	5 2 3	25

Pisteet	10	12	16	19	23
Arvosana	1	2	3	4	5